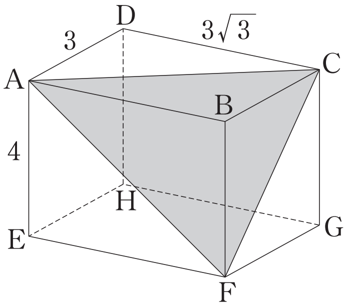
PART4　空間図形への応用

要点 ①　直方体の切り口の面積

空間図形に含まれる三角形に注目し，長さや面積を求める。

例　右図のような直方体 ABCD－EFGH がある。



△ACF の面積を求める。

△ABC，△ABF，△BCF のそれぞれにおいて

三平方の定理より

$$AC=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$$

$$AF=\sqrt{4^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{43}$$

$$CF=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

△ACF で余弦定理より

$$\cos\angle ACF=\frac{6^2+5^2-(\sqrt{43})^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{18}{2\cdot6\cdot5}=\frac{3}{10}$$

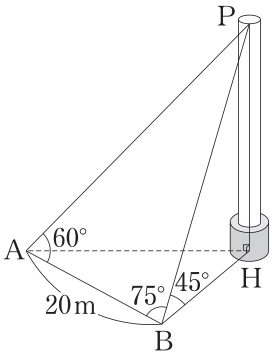
$$\sin\angle ACF=\sqrt{1-\cos^2\angle ACF}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{91}}{10}$$

よって $\triangle ACF=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot\sin\angle ACF=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{\sqrt{91}}{10}=\frac{3\sqrt{91}}{2}$

要点 ②　空間の測量

三角比を利用して，直接測ることが難しい長さを求めることができる。

例　校庭にポール PH が地面に垂直に立っている。ポールより離れた 2 地点 A，B とポールの先端 P について，



$AB=20$ (m)，$\angle PAB=60^\circ$，$\angle PBA=75^\circ$，

$\angle PBH=45^\circ$ であった。ポールの高さ PH を求めたい。

△PAB において

$$\angle APB=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$$

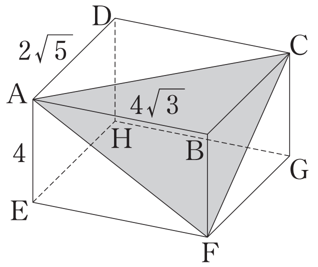
正弦定理より $\frac{BP}{\sin60^\circ}=\frac{20}{\sin45^\circ}$

$$BP=20\div\sin45^\circ\times\sin60^\circ=20\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{6}$$

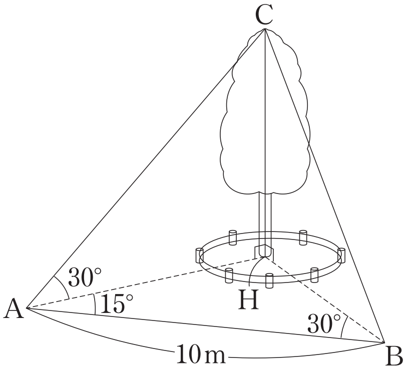
よって直角三角形 PBH において

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PB}\sin 45^\circ=10\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=10\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$$

4 (1) 右の図のように，$AB=4\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{5}$，$AE=4$ である直方体 ABCD−EFGH がある。△AFC の面積を求めよ。



(2) 右の図において，木の周りが柵で囲まれている。木より離れた 2 地点 A，B と木の先端 C について，$AB=10$ (m)，$\angle CAH=30^\circ$，$\angle HAB=15^\circ$，$\angle HBA=30^\circ$ であった。このとき木の高さ CH を求めよ。



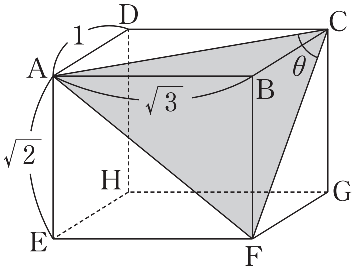
Point Pickup

空間図形への応用

空間図形に含まれる三角形に注目し，辺の長さや面積を求める。

第14講 PART4 確認問題

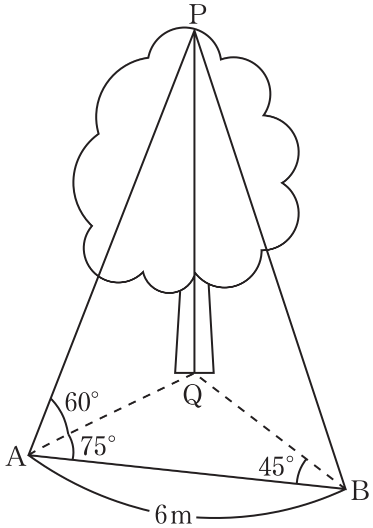
1 次の図のように，AB＝$\sqrt{3}$，AD＝1，AE＝$\sqrt{2}$ である直方体 ABCD-EFGH がある。



∠ACF＝θ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ であるから，

△AFC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$ である。

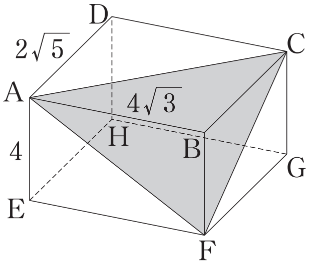
2 次の図のように，地面に垂直に立つ木 PQ と，地面の点 A，B があり，AB＝6 (m)，∠PAQ＝60°，∠QAB＝75°，∠QBA＝45° である。



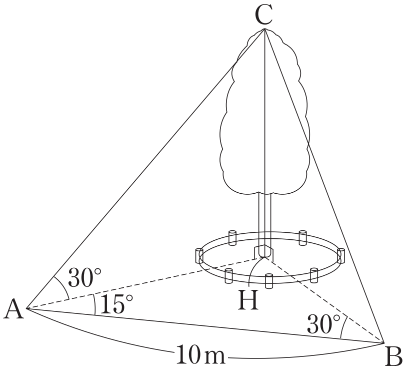
このとき，木 PQ の高さは $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ m である。

PART4 空間図形への応用

4 (1) 右の図のように，$AB=4\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{5}$，$AE=4$ である直方体 ABCD−EFGH がある。△AFC の面積を求めよ。



(2) 右の図において，木の周りが柵で囲まれている。木より離れた 2 地点 A，B と木の先端 C について，$AB=10$ (m)，$\angle CAH=30^\circ$，$\angle HAB=15^\circ$，$\angle HBA=30^\circ$ であった。このとき木の高さ CH を求めよ。



[解答]

(1) △ABC，△ABF，△BCF のそれぞれにおいて

三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{17}$$

$$AF=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$$

$$CF=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=6$$

△AFC で余弦定理より

$$\cos\angle AFC=\frac{8^2+6^2-(2\sqrt{17})^2}{2\cdot8\cdot6}=\frac{32}{2\cdot8\cdot6}=\frac{1}{3}$$

$$\sin\angle AFC=\sqrt{1-\cos^2\angle AFC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって $\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot CF\cdot\sin\angle AFC=\frac{1}{2}\cdot8\cdot6\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=16\sqrt{2}$

⑵　△HAB において

$\angle \mathrm{AHB} = 180^\circ - (15^\circ + 30^\circ) = 135^\circ$

正弦定理より $\dfrac{\mathrm{AH}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{10}{\sin 135^\circ}$

$$\mathrm{AH} = 10 \div \sin 135^\circ \times \sin 30^\circ = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 5\sqrt{2}$$

よって直角三角形 CAH において

$$\mathrm{CH} = \mathrm{AH} \tan 30^\circ = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}\ (\mathrm{m})$$

第14講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：6，ウエ：11，オ：2

[解説]

△ABC，△ABF，△BCF のそれぞれにおいて，

三平方の定理より，

$$AC=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$ [A]

$$AF=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$$

$$CF=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$

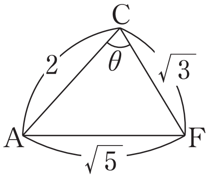
[A]　△AFC の 3 辺の長さを求める。

△AFC で余弦定理より，[B]

$$\cos\theta=\frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4+3-5}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$



[B]
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$\Longleftrightarrow\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{33}{36}$$

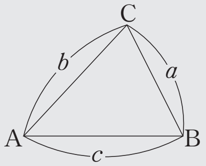
$\sin\theta>0$ より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{33}{36}}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

よって，△AFC の面積は，[C]

$$\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{33}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$$

[C]　△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$



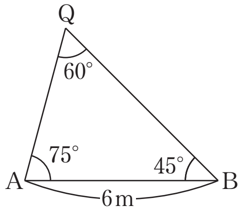
2 **[正解]** カ：6，キ：2

[解説]

△QAB において，

$$\angle \mathrm{AQB}=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$$

正弦定理より，[D]



$$\frac{\mathrm{AQ}}{\sin 45^\circ}=\frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$\mathrm{AQ}=\frac{6}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ$$

$$=6\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

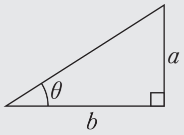
$$=2\sqrt{6}$$

よって，直角三角形 PAQ において，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}\tan 60^\circ$$ [E]

$$=2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=\mathbf{6\sqrt{2}}$$

[D]　正弦定理
△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

[E]　直角三角形において，
$a=b\tan\theta$